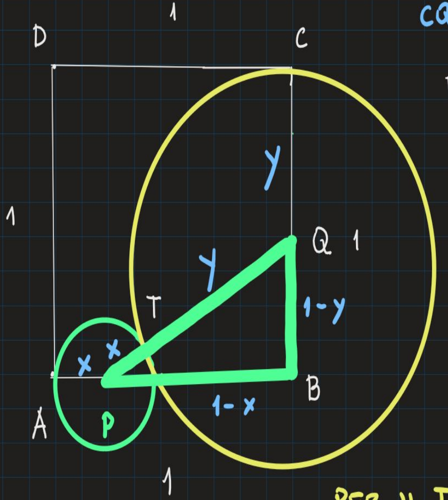
1. Se $AP = x$, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.



$\overline{PT} = \overline{AP} = x$ raggio

$\overline{CQ} = \overline{TQ} = y$ raggio

per differenza il lato vale 1

$\rightarrow \overline{QB} = 1 - y$

$\overline{PB} = 1 - x$

CONSIDERO IL TRIANGOLO RETTANGOLO:

$\overset{\Delta}{PBQ}$ con $\overline{PQ} = x + y$

$\overline{QB} = 1 - y$

$\overline{PB} = 1 - x$

PER IL T. DI PITAGORA:

$\overline{PQ}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{QB}^2 \rightarrow (x+y)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$

calcoli: $\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2xy = 1 + \cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 2y$ semplifico

$\cancel{2}xy + \cancel{2}y = \cancel{2} - \cancel{2}x \rightarrow y(x+1) = 1 - x$

da cui $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ ovvero $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ c.v.d.

2. Riferito il piano a un sistema di coordinate Oxy, si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste a x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, qual è il grafico della sua inversa?

LA FUNZIONE É OMOGRAFICA (STESSO GRAFICO)

· COSA VUOL DIRE?

UNA FUNZIONE OMOGRAFICA É UNA IPERBOLE PARTICOLARE

DEL TIPO $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

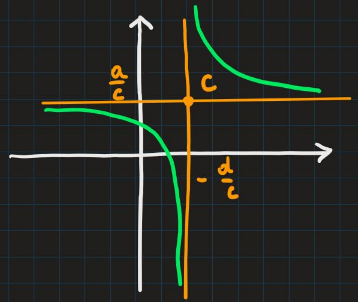
dove il dominio é $cx + d \neq 0$

$x \neq -\dfrac{d}{c}$ E L'ASINTOTO ORIZZON TALE LO HAI SE:

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{ax+b}{cx+d}$, ovvero $y = \dfrac{a}{c}$

ASINTOTI $x = -\dfrac{d}{c}$; $y = \dfrac{a}{c}$

E CENTRO $C\left(-\dfrac{d}{c} ; \dfrac{a}{c}\right)$



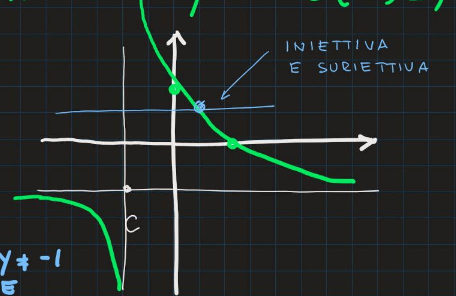
NEL NOSTRO CASO $y = \dfrac{-x+1}{x+1}$

CON $a = -1$ $b = 1$

$c = 1$ $d = 1$

GLI ASINTOTI SONO

$x = -1$ $y = -1$ $C(-1;1)$



SE $x = 0 \rightarrow y = 1$

SE $y = 0 \rightarrow x = 1$ ZERI

LA FUNZIONE É SURIETTIVA PER $y \neq -1$

PERCHÉ SE TRACCIO UNA QUALUNQUE

RETTA ORIZZONTALE INTERCETTO LA CURVA

È ANCHE INIETTIVA PERCHÉ INTERCETTO LA CURVA UNA SOLA VOLTA (RETTA AZZURRA)

CERCO LA FUNZIONE INVERSA, RICAVO X IN FUNZIONE DI Y:

$y=\frac{1-x}{1+x}$ m.c.m. $\frac{y(1+x)}{1+\cancel{x}} = \frac{1-x}{1+\cancel{x}}$ con $x \neq -1$

$y+xy = 1-x \rightarrow xy+x = 1-y \rightarrow x(y+1) = 1-y$

da cui $x = \frac{1-y}{y+1}$ ora scambio x con y

$\boxed{y = \frac{1-x}{x+1}}$ FUNZIONE INVERSA $\rightarrow f^{-1}(x) = f(x)$

$f^{-1}(x)$

SONO SIMMETRICHE RISPETTO A $y = x$

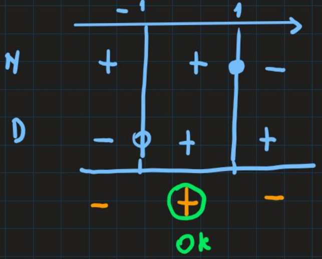
3. Sia $g(x)=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|, x\in\mathbb{R}-\{-1\}$, qual è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $R(0; 1)$? E nel punto $S(1; 0)$? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S?

RICORDA CHE:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{SE } a \geq 0 \\ -a & \text{SE } a<0 \end{cases} \rightarrow g(x) = \left|\frac{1-x}{1+x}\right| = \begin{cases} \frac{1-x}{1+x} & \text{SE } \frac{1-x}{1+x} \geq 0 \\ -\left(\frac{1+x}{1+x}\right) & \text{SE } \frac{1-x}{1+x} < 0 \end{cases}$$

STUDIA IL SEGNO DI $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$

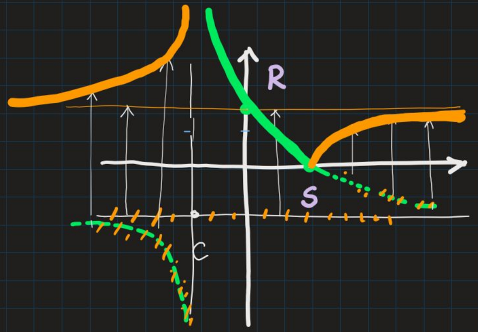
$N \geq 0 \quad 1-x \geq 0 \rightarrow x \leq 1$; $D > 0 \quad 1+x > 0 \rightarrow x > -1$



$$\rightarrow g(x) \begin{cases} \frac{1-x}{1+x} & \text{SE } -1 < x \leq 1 \\ \frac{x-1}{1+x} & \text{SE } x<-1 \vee x>1 \end{cases}$$

QUESTO SIGNIFICA CHE LA PARTE NEGATIVA DEL GRAFICO DI $f(x)$ DEVE ESSERE CAPOVOLTA VERSO L'ALTO PER AVERE IL GRAFICO DI $g(x)$ E LO SI FA PER $x<-1$ E $x>1$

E VALE LA STESSA COSA PER L'ASINTOTO ORIZZONTALE CHE DA NEGATIVO DIVENTA POSITIVO



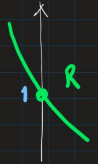
DOBBIAMO ORA TROVARE LA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI $g(x)$ NEL PUNTO $R(0;1)$ E $S(1;0)$.

L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE ALLA FUNZIONE È

$$y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$$

CON $g'(x) = \frac{(-1)(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{1+x^2}$ SE $-1<x\le 0$

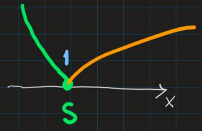
$g'(x) = \frac{1(1+x)-(-1+x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2}{(1+x)^2}$ SE $x<-1 \vee x>1$



ALLA SINISTRA DI R E ALLA DESTRA HAI LA STESSA FUNZIONE $-1 < x_R < 1$ QUINDI

$g'(x_R) = g'(0) = -2$, LA RETTA TANGENTE É

$g(0)=1 \rightarrow y-1 = -2(x-0) \rightarrow \boxed{y=-2x+1}$



A SINISTRA DI S $g'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2}$

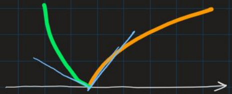
$\lim_{x\to 1^-} \frac{-2}{(1+x)^2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} = g'_-(1)$

A DESTRA DI S $g'(x) = \frac{2}{(1+x)^2} \rightarrow \frac{1}{2} = g'_+(1)$

I DUE COEFFICIENTI ANGOLARI SONO DIVERSI E FINITI

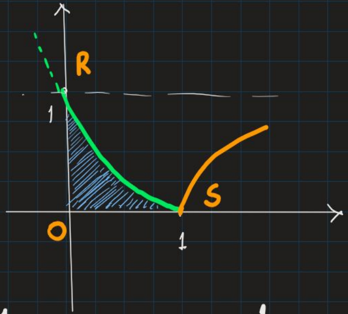
$\rightarrow$ IN $x=1$ C'É UN PUNTO ANGOLOSO

NON ESISTE UN'UNICA RETTA TANGENTE IN S



PERCHÉ LA FUNZIONE NON É DERIVABILE $g'_- \neq g$

4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo *ROS*, ove l'arco *RS* appartiene al grafico di $f(x)$ o
rentemente, di $g(x)$.



L'AREA RICHIESTA LA PUOI OTT
DALL'INTEGRALE: (FUNZIONE SINI

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{1-x-2+2}{1+x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{-1-x+2}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{-(1+x)+2}{1+x}$$

$$= \int_0^1 -\frac{1+x}{1+x}\,dx + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = -\int_0^1 dx + \left[2\ln|1+x|\right]_0^1$$

$$= -\left[x\right]_0^1 + (2\ln 2 - 2\ln 1) = -(1-0) + \ln 4 = \boxed{\ln 4}$$