PROBLEMA 1

Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali da

$$f(x) = |27x^3| \quad \text{e} \quad g(x) = \text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right).$$

1. Qual è il periodo della funzione g? Si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy.
2. Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a G_f e G_g nel punto di ascissa $x = \frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da r e da s?
3. Sia R la regione delimitata da G_f e da G_g. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R, ruotando attorno all'asse x, genera il solido S e, ruotando intorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.

1)

IL PERIODO DI UNA FUNZIONE $y = \sin x$ É 2π

IL PERIODO DI UNA FUNZIONE $y = \sin ax$ É $\frac{2\pi}{a}$

NEL TESTO HAI $y = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ dove il tuo $a = \frac{3}{2}\pi$

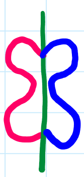
$\rightarrow$ IL PERIODO É $T = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}\pi} = 2\cancel{\pi} \cdot \frac{2}{3\cancel{\pi}} \rightarrow \boxed{T = \frac{4}{3}}$

STUDIO LA FUNZIONE $f(x) = |27x^3|$: ricorda $|a| = \begin{cases} a & \text{SE } a \geq 0 \\ -a & \text{SE } a < 0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 27x^3 & \text{SE } 27x^3 \geq 0 \text{ cioé SE } x \geq 0 \\ -27x^3 & \text{SE } 27x^3 < 0 \text{ cioé SE } x < 0 \end{cases}$$

LA FUNZIONE É PARI, INFATTI $f(-x) = |27(-x)^3| = |-27x^3| =$
$= |27x^3| = f(x) \rightarrow$ PARI SE $f(-x) = f(x)$

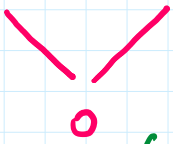
NELLE FUNZIONI PARI IL GRAFICO É SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE y.



IL DOMINIO É $\mathbb{R}$, LA FUNZIONE É CONTINUA E SEMPRE POSITIVA. $f(0) = 0$

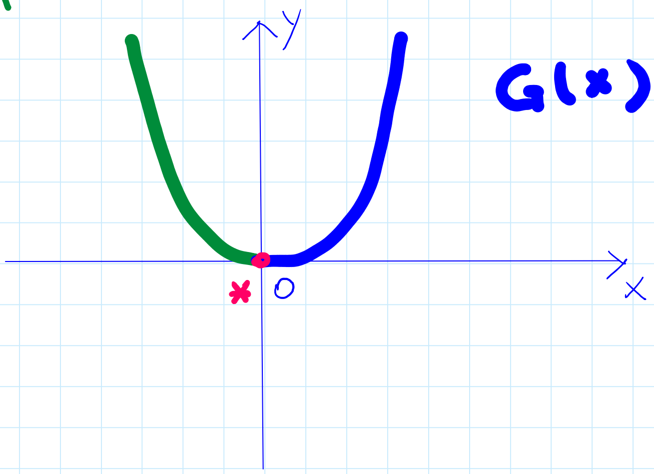
$$f'(x) = \begin{cases} 81x^2 & \text{SE } x > 0 & (0; +\infty) & \text{CRESCENTE} \\ 0 & \text{SE } x = 0 & 0 & \text{PUNTO CRITICO} \\ -81x^2 & \text{SE } x < 0 & (-\infty; 0) & \text{DECRESCENTE} \end{cases}$$

$$\left| -81x^2 \right. \quad \text{SE } x<0 \qquad (-\infty;0) \quad \text{DECRESCENTE}$$



→ O(0;0) È UN PUNTO DI MINIMO

$$f''(x)=\begin{cases} 162x & \text{SE } x>0 \quad \text{POSITIVA} \rightarrow \text{CONCAVITÀ } \cup \\ 0 & \text{SE } x=0 \quad \text{MINIMO} \\ -162x & \text{SE } x<0 \quad \text{POSITIVA} \rightarrow \text{CONCAVITÀ } \cup \end{cases}$$



*È FREQUENTE AVERE PUNTI ANGOLOSI IN FUNZIONI CON VALORE ASSOLUTO.

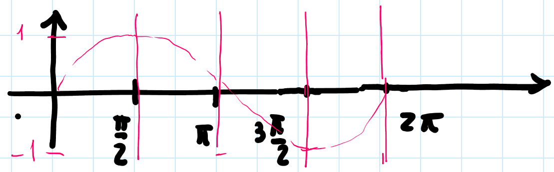
NON IN QUESTO CASO

$$0=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)$$

FINITI

STUDIAMO LA FUNZIONE $g(x)=\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ CON PERIODO $\frac{4}{3}$

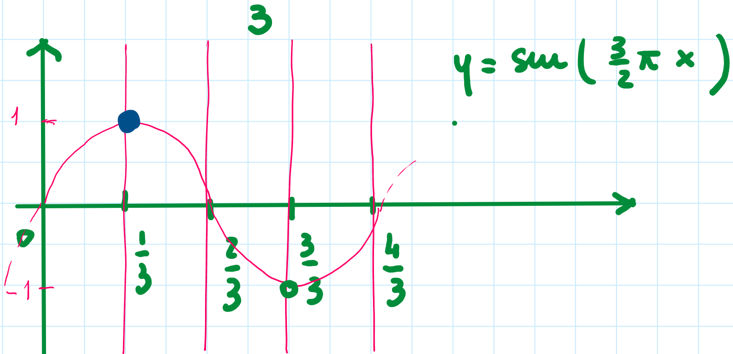
IL PERIODO DELLA FUNZIONE $y=\sin x$ È 2π CON I 4 QUADRANTI IN $0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3}{2}\pi;\ 2\pi$

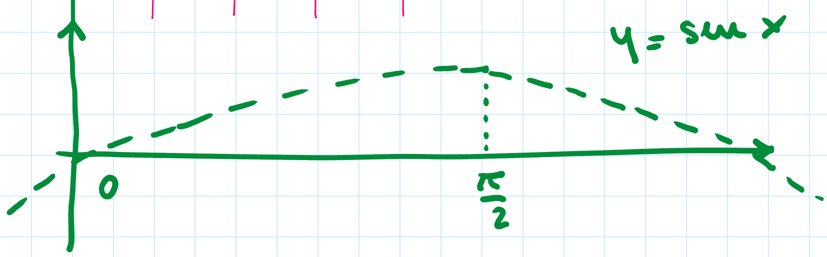


NEL NOSTRO CASO ABBIAMO IL PERIODO DI $\frac{4}{3}$ CHE HA I 4 QUADRANTI IN $0;\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{3};\ \frac{4}{3}$

SI ANNULLA IN $\frac{2}{3}k \quad \left(\underset{k=0}{0};\ \underset{k=1}{\frac{2}{3}};\ \underset{k=2}{\frac{4}{3}} \dots\right)$

- HA MASSIMI IN $x=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}k$
- HA MINIMI IN $x=1+\frac{4}{3}k$





2. Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a G_f e G_g nel punto di ascissa $x=\frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da r e da s?

LA RETTA TANGENTE A UNA FUNZIONE $h(x)$ IN UN PUNTO $P(x_P; y_P)$ É $\quad y - h(x_P) = \underset{*}{h'}(x_P)(x - x_P) \quad$ CON $x_P = \frac{1}{3}$

PER $f(x) = |27x^3| \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \left|27 \cdot \frac{1}{27}\right| = 1$ E, SICCOME

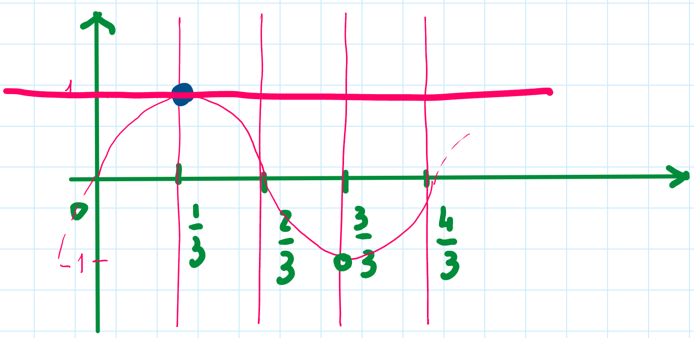
$f'(x) = 81x^2$ PER $x>0 \rightarrow f'\left(\frac{1}{3}\right) = 81 \cdot \frac{1}{9} = 9$ SOSTITUISCO *

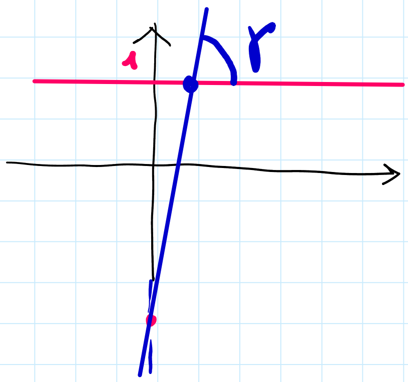
$y - 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right) \rightarrow \boxed{y = 9x - 2}$

PER $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \qquad g\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\cancel{3}}{2}\pi \cdot \frac{1}{\cancel{3}}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$

$g'(x) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \cdot \frac{3}{2}\pi \rightarrow g'\left(\frac{1}{3}\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{2}\pi =$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{3}{2}\pi = 0$, INFATTI DAL GRAFICO IN $x = \frac{1}{3}$ C'É IL MASSIMO E LA TANGENTE É ORIZZONTALE





1^a RETTA $\quad y = 9x - 2 \quad (m = 9)$

2^a RETTA $\quad y = 1 \quad (m = 0)$

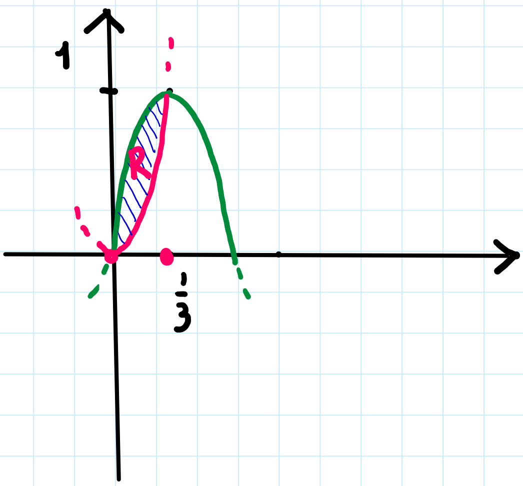
l'angolo CERCATO É:

$\operatorname{tg}\gamma = 9 \rightarrow \gamma = \operatorname{arctg} 9 =$

$= 83° \, 40'$

3. Sia R la regione delimitata da G_f e da G_g. Si calcoli l'area di R.

DAL PUNTO 2) SI HA



DAL PUNTO 2) SI HA

$f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ e $g\left(\frac{1}{3}\right) = 1$

QUINDI $x = \frac{1}{3}$ È LA SECONDA INTERSEZIONE OLTRE A $x = 0$

L'AREA É: (FUNZ. SOPRA - FUN. SOTTO)

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 27x^3 \right] dx =$$

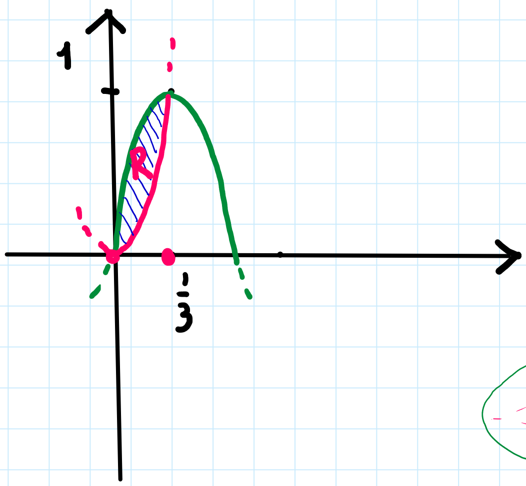
$$\int_0^{\frac{1}{3}} \operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi x \, dx - \int_0^{\frac{1}{3}} 27x^3 \, dx =$$

$$= \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{3}{2}\pi \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) dx - 27 \int_0^{\frac{1}{3}} x^3 \, dx =$$

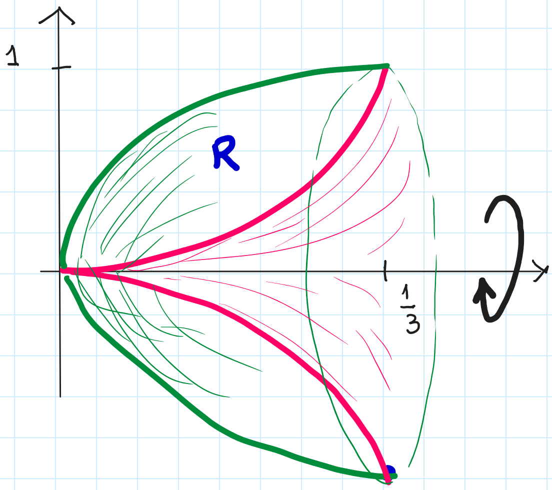
$$= \frac{2}{3\pi} \left[-\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \right]_0^{\frac{1}{3}} - 27 \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^{\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\pi}\left(\cancel{\cos\frac{\pi}{2}} - \cos 0 \right) -$$

$$- 27 \left(\frac{1}{4 \cdot 81} - \frac{1}{4} \cdot 0 \right) = \boxed{+\frac{2}{3\pi} - \frac{1}{12}} > 0$$ quindi accettabile

4. La regione R, ruotando attorno all'asse x, genera il solido S e, ruotando intorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.



INGRANDISCI IL DISEGNO



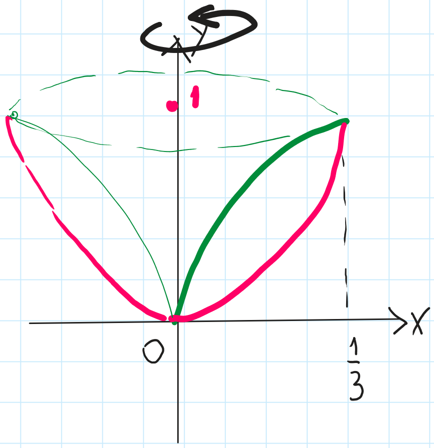
PER OTTENERE IL VOLUME CERCATO "S" INTORNO ALL'ASSE

PER OTTENERE IL VOLUME CERCATO "S" INTORNO ALL'ASSE SOTTRAGGO AL VOLUME VERDE QUELLO ROSSO, CIOÈ:

$$V_S = \pi \int_0^{\frac{1}{3}} [\, g(x) - f(x)\,]^2 dx = \pi \int_0^{\frac{1}{3}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right) dx -$$

$$-\pi \int_0^{\frac{1}{3}} (27x^3)^2 dx =$$ OMETTIAMO IL CALCOLO COME INDICATO.

IL SOLIDO "T" È GENERATO DALLA ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE



PER OTTENERE IL VOLUME T TOLGO IL VOLUME VERDE DA QUELLO ROSSO

- RICAVO $f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{1}{3}\sqrt[3]{y} = x$

E INTEGRO TRA O E 1 (VOL. ROSSO)

- RICAVO $g^{-1}(x) \Rightarrow \frac{3}{2}\pi x = \arcsin y$

$\rightarrow x = \frac{2}{3\pi}\arcsin y$

INTEGRO: $V(T) = V f^{-1} - V g^{-1} =$

$$= \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{y}\right)^2 dy - \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{3\pi}\arcsin y\right)^2 dy$$

E NON SVOLGO I CALCOLI.