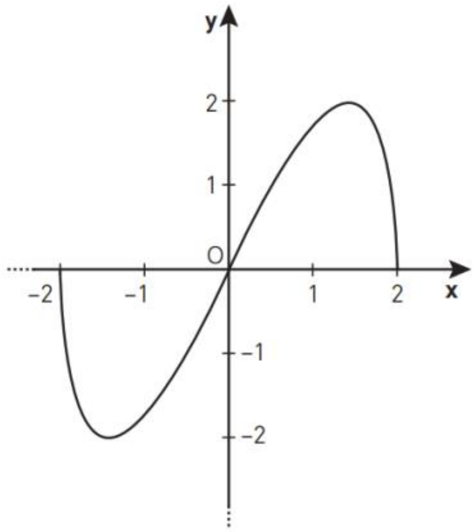
PROBLEMA 2

A lato è disegnato il grafico Γ della funzione

$$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}.$$

1. Si calcolino il massimo e il minimo assoluti di $f(x)$.
2. Si dica se l'origine O è centro di simmetria per Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in O a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x.
3. Si disegni la curva di equazione $y^2 = x^2(4 - x^2)$ e si calcoli l'area della parte di piano da essa racchiusa.
4. Sia $h(x) = \text{sen}(f(x))$ con $0 \leq x \leq 2$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x) = k$ ha 4 soluzioni distinte?



1)

LA FUNZIONE ASSEGNATA HA DOMINIO PER $4 - x^2 \geq 0$ OVVERO $-2 \leq x \leq 2$, CALCOLO LA DERIVATA PRIMA:

$$y' = 1 \cdot \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}}(-\cancel{2}x) \Rightarrow m.c.m \Rightarrow \frac{(4-x^2) - x^2}{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}.$$

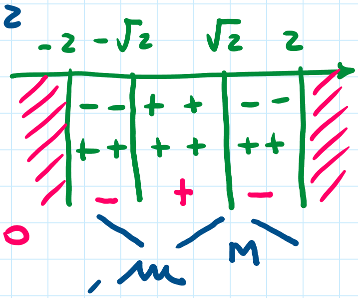
PER TROVARE GLI EVENTUALI PUNTI DI MASSIMO PONGO $y' = 0$.

•) $4 - 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$ ORA STUDIO IL SEGNO DI y':

$$\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} > 0$$

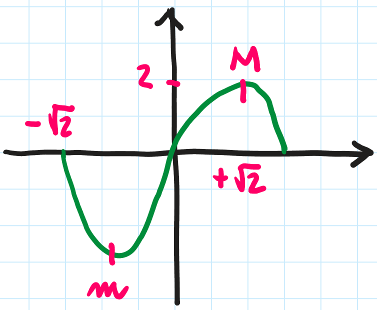
$N > 0$ $\quad -\sqrt{2} < x < +\sqrt{2}$

$D > 0$ $\quad \forall x \in D$.



IL PUNTO DI ASCISSA $x = -\sqrt{2}$ É UN PUNTO DI MINIMO

IL PUNTO DI ASCISSA $x = -\sqrt{2}$ É UN PUNTO DI MASSIMO



L'ORDINATA DEL PUNTO DI MASSIMO É

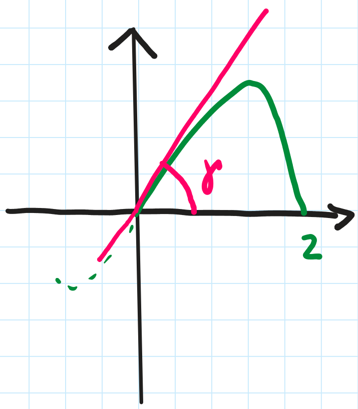
$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{4-(\sqrt{2})^2} = 2$$

$M(\sqrt{2}; 2)$

2. Si dica se l'origine O è centro di simmetria per Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in O a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x.

VERIFICHIAMO LA SIMMETRIA (PARITÁ) DELLA FUNZIONE VALUTANDO $f(-x) = (-x)\sqrt{4-(-x)^2} = -x\sqrt{4-x^2} = -f(x)$ DI CONSEGUENZA LA FUNZIONE É DISPARI E QUINDI SIMMETRICA RISPETTO A O

LA TANGENTE IN O ALLA CURVA HA IL SUO COEFFICIENTE ANGOLARE



UGUALE A $f'(0) = \dfrac{4-2\cdot 0^2}{\sqrt{4-0^2}} = 2$ E PER OTTENERE L'ANGOLO γ RICORDA CHE $f'(0) = \operatorname{tg}\gamma$

PER CUI $\gamma = \operatorname{arctg} 2 = 63{,}43^\circ$

PER SCRIVERLO IN SESSAGESIMALI:

$43 \text{ dec} : 100 \text{ dec} = x' : 60 \rightarrow x = \dfrac{43\cdot 60}{100} = 26'$

$$\boxed{\gamma = 63^\circ 26'}$$

3. Si disegni la curva di equazione $y^2 = x^2(4-x^2)$ e si calcoli l'area della parte di piano da essa racchiusa.

La curva assegnata é: $y^2 = 4x^2 - x^4$ E NON RAPPRESENTA UNA FUNZIONE INFATTI $y = \pm\sqrt{4x^2 - x^4}$ OVVERO, SCELTA UNA x NON SI OTTIENE UNA E UNA SOLA y.

DISEGNAMO LA CURVA DIVIDENDOLA IN DUE FUNZIONI:

$$y = \pm\sqrt{x^2(4-x^2)} = \pm|x|\sqrt{4-x^2}$$

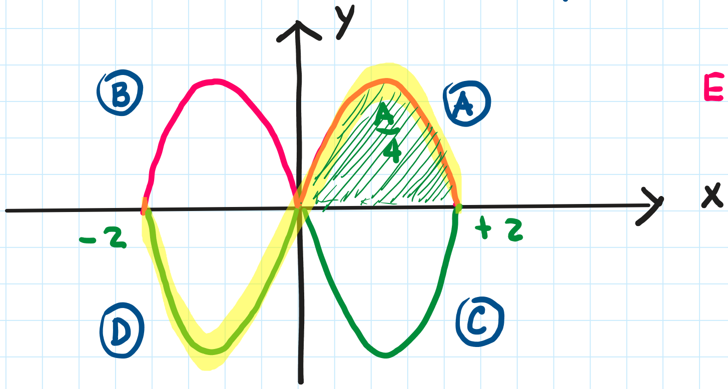
FUNZIONE $f_1 = +|x|\sqrt{4-x^2}$; $f_2 = -|x|\sqrt{4-x^2}$

$$f_1 = \begin{cases} x\sqrt{4-x^2} & \text{SE } x \geq 0 \\ -x\sqrt{4-x^2} & \text{SE } x < 0 \end{cases} \qquad f_2 \begin{cases} -x\sqrt{4-x^2} & \text{SE } x \geq 0 \\ +x\sqrt{4-x^2} & \text{SE } x < 0 \end{cases}$$

RICORDA CHE $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ PER CUI :

$$f_1 = \begin{cases} A \quad f(x) & \text{SE } x \geq 0 \\ B \quad -f(x) & \text{SE } x < 0 \end{cases} \quad ; \quad f_2 = \begin{cases} C \quad -f(x) & \text{SE } x \geq 0 \\ D \quad +f(x) & \text{SE } x < 0 \end{cases}$$

per cui le curve sono le stesse del grafico di $f(x)$, nel caso di $-f(x)$ otteniamo la simmetrica rispetto all'asse x



EVIDENZIATA IN GIALLO LA VECCHIA $f(x)$

L'AREA RACCHIUSA É 4 VOLTE L'AREA DELLA $f(x)$ INIZIALE TRA 0 E 2 COLORATA

$$\frac{A}{4} = \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 -2x\sqrt{4-x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^2 \underbrace{-2x}_{f'} \underbrace{\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{f^m} dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+1\right)} \left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}\right]_0^2 = -\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\left(\cancel{\sqrt{(4-4)^3}} - \sqrt{(4-0)^3}\right) = -\frac{1}{3}\left(\sqrt{4^3}\right) =$$

$$= +\frac{1}{3}\cdot 8 = \frac{8}{3}$$ L'INTERA AREA É $4\cdot\frac{8}{3} = \boxed{\frac{32}{3}}$

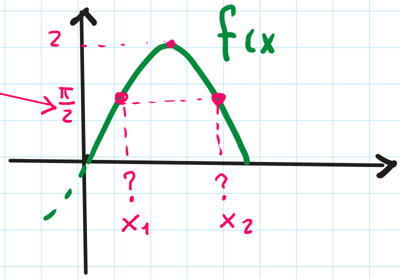
4. Sia $h(x) = \text{sen}(f(x))$ con $0 \le x \le 2$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x) = k$ ha 4 soluzioni distinte?

I VALORI IN CUI LA FUNZIONE SENO HANNO ORDINATA 1

COMPRESI IN $[0;2]$ SONO $\frac{\pi}{2}$ E $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \underbrace{\frac{5}{2}\pi}_{\sim 8}$ ETC. MA SOLO

$\frac{\pi}{2} \in [0;2]$ $h(x) = \sin[f(x)] \rightarrow h(x) = \sin y$ E

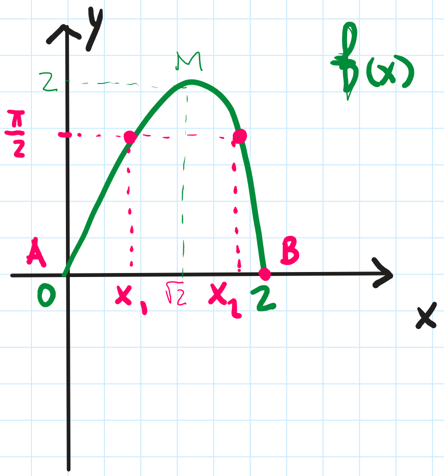
$h(x)$ VALE 1 QUANDO $y = \frac{\pi}{2}$



x_1 E x_2 PRODUCONO $y = \frac{\pi}{2}$

CI SONO 2 VALORI CHE SODDISFANO LA RICHIESTA

DEDUZIONE DEL GRAFICO DI $h(x)$ A PARTIRE DAL GRAFICO DI $f(x)$



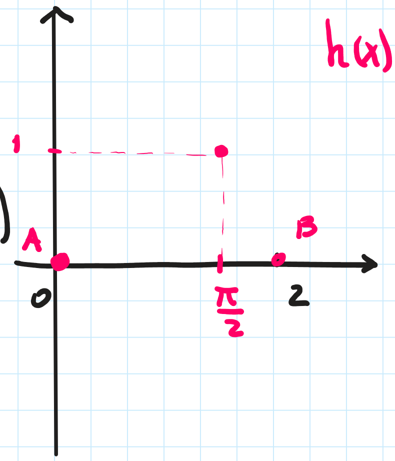
A) $h(0) = h$ (cosa succede a y quando $x = 0$?)

$y = 0$

B) $h(2) = h$ (cosa succede a y quando $x = 2$?)

$y = 0$

$h(x)$ È UN SENO, IL SUO MASSIMO VALE 1



C) $\begin{cases} 0 < x < x_1 \\ 0 < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ f CRESCENTE ; h CRESCENTE

D) $\begin{cases} x = x_1 \\ y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $h(x_1) = 1$ PUNTO DI MASSIMO DI h

E) $\begin{cases} x_1 < x < \sqrt{2} \\ \frac{\pi}{2} < y < 2 \end{cases}$ $f(x)$ CRESCENTE , $h(x)$ DECRESCENTE , $\text{sen}\, 2 < h < \underbrace{\text{sen}\, \frac{\pi}{2}}_{1}$

F) $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases}$ $f(\sqrt{2}) = 2$ HA UN MASSIMO , $h(\sqrt{2}) = \text{sen}\, y = \text{sen}\, 2$

F) $y = 2$

G) $\sqrt{2} < x < x_2$ $f(x)$ DECRESCE
$\frac{\pi}{2} < y < 2$ h IN x_2 AVRÁ UN MASSIMO QUINDI CRESCE $\text{sen}\, 2 < h < 1$

H) $x = x_1$ $f(x_1) = \frac{\pi}{2}$ $h(x)$ HA UN MASSIMO $(x_2 ; 1)$
$y = \frac{\pi}{2}$

I) $x_2 < x < 2$ $f(x)$ DECRESCE $\rightarrow$ $h(x)$ decresce $0 < h(x) < 1$
$0 < y < \frac{\pi}{2}$

OSSERVANDO IL GRAFICO L'EQUAZIONE $h(x) = k$ HA 4 SOLUZIONI DISTINTE SE (DISEGNO $y = k$)

- $\text{sen}\, 2 < k < 1$