PROBLEMA 2

Nella figura 3 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f:[0;+\infty[\,\to\mathbb{R}$, derivabile in $]0;+\infty[$, e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

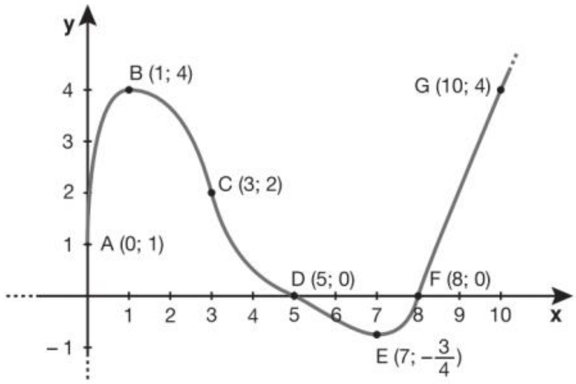


Figura 3

È noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x+y-8=0$.
Nel punto D la retta tangente ha equazione $x+2y-5=0$ e per $x\geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G. Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco $ABCD$, dall'asse x e dall'asse y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1.

1. In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni

$$y=f'(x),\qquad F(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$$

Quali sono i valori di $f'(3)$ e $f'(5)$? Motiva la tua risposta.

2. Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:

$$y=|f'(x)|,\qquad y=|f(x)|',\qquad y=\frac{1}{f(x)},$$

specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

3. Determina i valori medi di $y=f(x)$ e di $y=|f(x)|$ nell'intervallo $[0;8]$, il valore medio di $y=f'(x)$ nell'intervallo $[1;7]$ e il valore medio di $y=F(x)$ nell'intervallo $[9;10]$.

4. Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

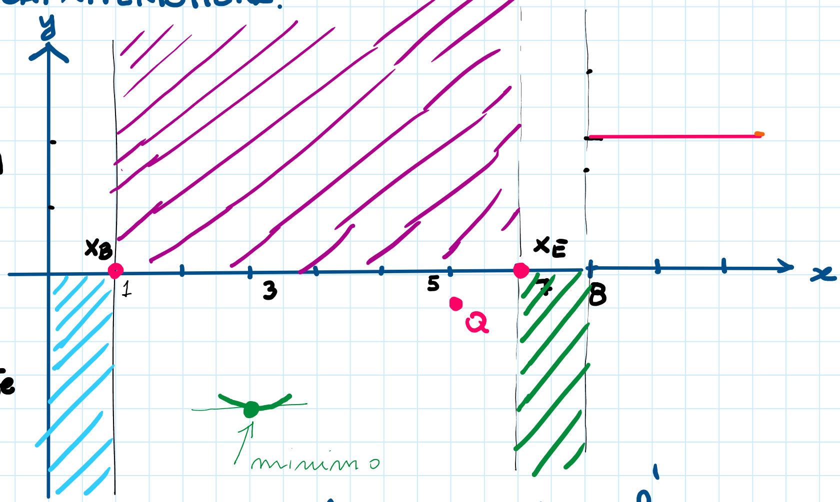
COSTRUIAMO IL GRAFICO DI $f'(x)$ PUNTO PER PUNTO, OSSERVANDO IN BASE AL TESTO LE SUE CARATTERISTICHE.

Nel punto D la retta tangente ha equazione $x+2y-5=0$ e per $x\geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G. Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco $ABCD$, dall'asse x e dall'asse

LA $f(x)$ PER $x\geq 8$ É UNA RETTA PASSANTE PER 2 PUNTI $F(8,0)$ E $G(10;4)$

$$\frac{x-8}{10-8}=\frac{y-0}{4-0}\rightarrow\frac{x-8}{2}=\frac{y}{4}$$

$$\rightarrow y=2x-16\rightarrow y'=2 \text{ costante}$$



IN $x=0$ LA $f(x)$ HA UNA TANGENTE VERTICALE ($m\to\infty$) $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=+\infty$

PER y' $x=0$ É UN ASINTOTO VERTICALE.

NEL TRATTO $0<x<1$ $f(x)$ É CRESCENTE, QUINDI $0<x<1$ $f'(x)>0$

TOLGO LA PARTE NEGATIVA.

che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo

TOLGO LA PARTE NEGATIVA.

, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, $\rightarrow$ $f'(x_B)=0$ E $f'(x_E)=0$, OVVERO

LA FUNZIONE $f'(x)$ HA 2 ZERI IN $x_B = 1$ E IN $x_E = 7$ (PUNTINI ROSSI)

È noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x + y - 8 = 0$.

NEL PUNTO C(3,2) C'E' UN FLESSO DI TANGENTE $y = -2x + 8$ OVVERO $f'(x_C) = -2 \rightarrow f'(3) = -2$, LA FUNZIONE $f'(x)$ PASSA PER IL PUNTO $(3,-2)$ punto verde ED É ANCHE UN MINIMO PER $f'(x)$ PERCHÉ SE E' UN FLESSO $f'' = 0$ OVVERO LA DERIVATA PRIMA DI $f'(x) = 0$ E $f'(x)$ HA UN MINIMO.

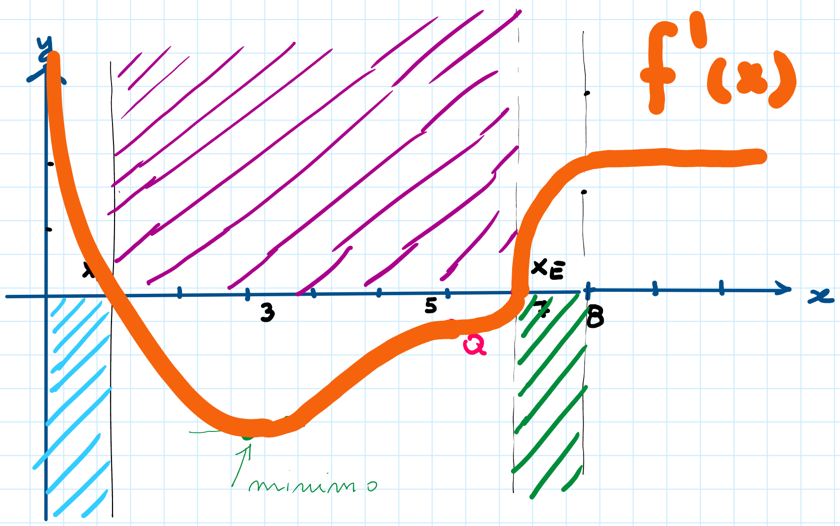
Nel punto D la retta tangente ha equazione $x + 2y - 5 = 0$

IN D(5,0) LA RETTA TANGENTE É $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \rightarrow m = -\frac{1}{2}$

OVVERO $f'(5) = -\frac{1}{2} \rightarrow f'$ PASSA PER $Q(5; -\frac{1}{2})$

NEL TRATTO $1 < x < 7$ LA $f(x)$ DECRESCE, QUINDI $f'(x) < 0$, TOLGO LA PARTE SOPRA

NEL TRATTO $7 < x < 8$ LA $f(x)$ CRESCE, QUINDI $f'(x) > 0$, TOLGO LA PARTE SOTTO.

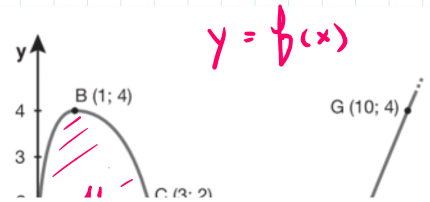


LA CURVA É FRUTTO DI UNA DEDUZIONE A PARTIRE DAL GRAFICO DI $f(x)$.

LA RICHIESTA É QUELLA DI TRACCIARE IL GRAFICO DELLA FUNZIONE INTEGRALE $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ dove $f(x)$ é NOTA ATTRAVERSO IL SUO GRAFICO.

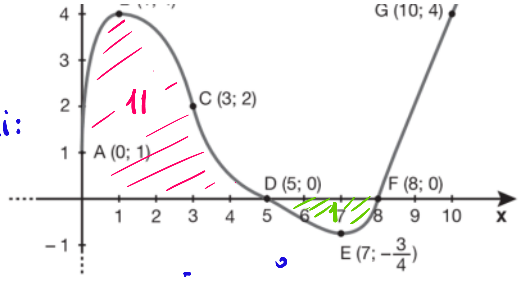
PER CALCOLARE $F(1) \rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$

$F(2) \rightarrow \int_0^2 f(x)\,dx$



$$F(2) \rightarrow \int_0^2 f(x)\,dx$$

E ... COSÌ VIA PER CUI:



$$F(8) = \int_0^8 f(x)\,dx = \int_0^5 f(x)\,dx + \int_5^8 f(x)\,dx$$

passante per il punto *G*. Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco *ABCD*, dall'asse *x* e dall'asse *y* vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco *DEF* e dall'asse *x* vale 1.

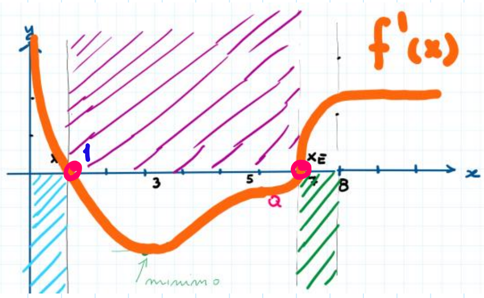
$\int_0^5 f(x)\,dx$ É L'AREA INTICATA $\overset{\frown}{ABCD} = \boxed{11}$

$\int_5^8 f(x)\,dx$ É L'AREA INDICATA DEF $= \boxed{1}$

Segue che $F(5) = 11 \rightarrow F(8) = 11 - 1 = 10$ (L'AREA VERDE É NEGATIVA)

LA CORRETTA GERARCHIA É

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$$
$$F'(x) = f(x)$$
$$F''(x) = f'(x)$$



SE OSSERVI IL GRAFICO DI $f'(x)$ NOTI CHE

$f'(x) > 0$ per $0 < x < 1$ o $x > 7$

IN QUESTI INTERVALLI $F(x)$ HA CONCAVITÀ VERSO L'ALTO

	0		1		7	
$F''(x) = f'(x)$		+		−		+
$F(x)$		∪		∩		∪

ZERO

FLESSI

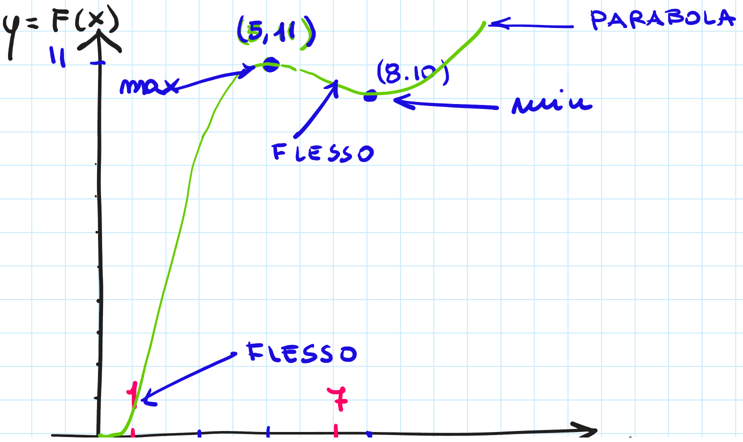
DOVE CAMBIA LA CONCAVITÀ C'É UN PUNTO DI FLESSO

$f(x)$ PER $x \geq 8$ HA EQUAZIONE $y = 2x - 16$ TROVATA PRIMA

SEGUE CHE $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^8 f(t)\,dt + \int_8^x [2x - 16] =$

$= 10 + \left[\frac{2}{2}t^2 - 16t\right]_8^x = 10 + x^2 - 16x - 64 + 128 = x^2 - 16 + 74$

OVVERO UNA PARABOLA

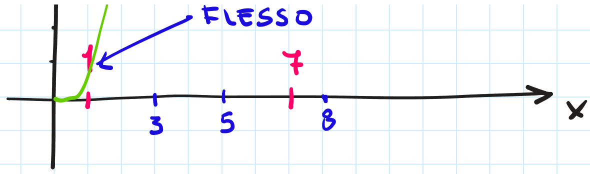


- DALLO STUDIO DI $f'(x)$

$f'(3) = -2$ e $f'(5) = -\frac{1}{2}$

coef

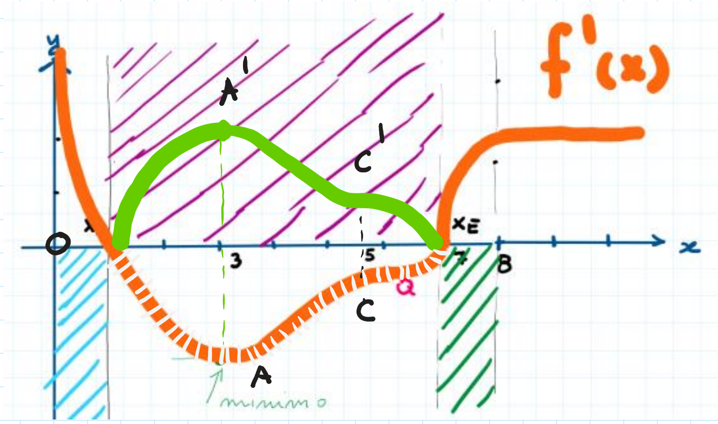
coef



2) 2. Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:

A) $y=|f'(x)|$, B) $y=|f(x)|'$, C) $y=\frac{1}{f(x)}$,

specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

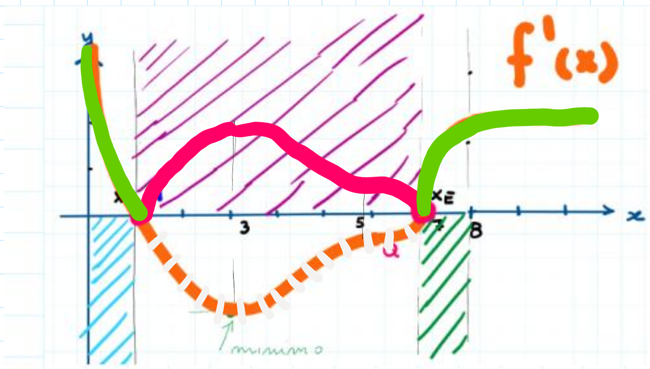


A) IL GRAFICO DI $|f'(x)|$ LO SI RICAVA DA QUELLO DI $f'(x)$ DOVE RIBALTO LA PARTE "NEGATIVA" A POSITIVA

COSÌ COME $f'(x)$ ANCHE $|f'(x)|$ È DEFINITA IN $]0;+\infty[$

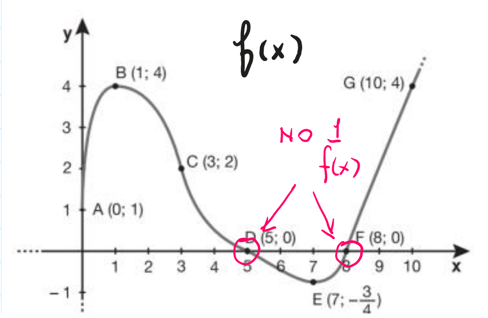
B) $y=|f(x)|'$ LA FUNZIONE $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{SE } f(x)\geq 0 \\ -f(x) & \text{SE } f(x)<0 \end{cases}$

$\begin{cases} \text{IL GRAFICO DI } |f| \text{ COINCIDE CON IL GRAFICO DI } f \rightarrow |f|' = f' \\ \text{IL GRAFICO DI } |f| \text{ È UGUALE AL GRAFICO DI } -f \rightarrow |f|' = -f' \end{cases}$



C) $y=\frac{1}{f(x)}$ IL DOMINIO DI QUESTA FUNZIONE SI DETERMINA PER $f(x)\neq 0$ IN QUANTO DENOMINATORE

$\rightarrow D: [0,+\infty[- \{5;8\}$

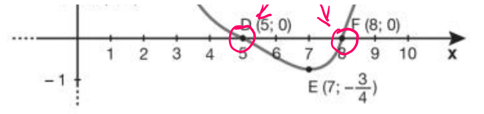


ANDIAMO AVANTI PUNTO PER PUNTO

A : $f(0)=1 \rightarrow \frac{1}{f(0)} = 1$ $A'(0,1)$

B : $f(1)=4$ $\frac{1}{f(1)} = \frac{1}{4} \rightarrow B'(1,\frac{1}{4})$

C : $f(3)=2$ $\frac{1}{\ldots} = \frac{1}{\ldots}$ $C'(3;\frac{1}{2})$



$f(1)$ 4

C: $f(3)=2$ $\qquad \frac{1}{f(3)}=\frac{1}{2}$ $\qquad C'(3;\frac{1}{2})$

D: $f(5)=0$ IMPOSSIBILE TROVARE $\frac{1}{f(5)}$; E: $f(7)=-\frac{3}{4}$ $\rightarrow$ $E'=(7;-\frac{4}{3})$

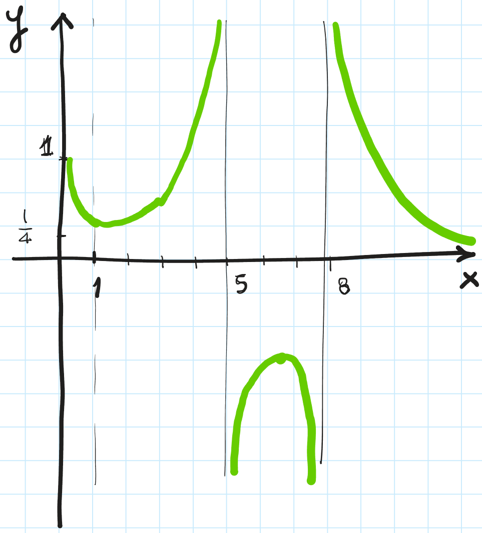
F IMPOSSIBILE ; $G = f(10)=4 \rightarrow G'=(10;\frac{1}{4})$

PERCHÉ $\frac{1}{f(x)}$ SIA NULLA É NECESSARIO CHE $f(x)\rightarrow\infty$ E NON ACCADE.

IL SEGNO DI $\frac{1}{f(x)}$ É LO STESSO DI $f(x)$.

IN $x=5$ E $x=8$ $f(x)=0$ $\rightarrow$ $x=5$ E $x=8$ SONO ASINTOTI VERTICALI

LA FUNZIONE $y=\frac{1}{f(x)}$ CRESCE QUANDO $f(x)$ DECRESCE E DECRESCE QUANDO $f(x)$ CRESCE.



PER $x\geqslant 8$ $f(x)=2x-16 \rightarrow \frac{1}{f(x)}=\frac{1}{2x-16}$

CHE É UN'IPERBOLE CON $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$ $\quad x=0$ A.O.

$\lim_{x\to 8^+}\frac{1}{f(x)}=+\infty$

$y'=\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ in $x=7$ $f'(7)=0 \rightarrow \frac{1}{f(x)}$ HA MAX

3)

3. Determina i valori medi di $y=f(x)$ e di $y=|f(x)|$ nell'intervallo $[0;8]$, il valore medio di $y=f'(x)$ nell'intervallo $[1;7]$ e il valore medio di $y=F(x)$ nell'intervallo $[9;10]$.

IL TEOREMA DEL VALOR MEDIO FORNISCE L'ORDINATA CHE DIVIDE L'AREA SOTTESA A METÀ $\qquad y_{MEDIO}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

$=\frac{1}{8-0}\int_0^8 f(x)\,dx=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}=1{,}25$

IL VALOR MEDIO DELLA FUNZIONE $y=|f(x)|$ É $\frac{1}{8}\int_0^8 |f(x)|\,dx$

$=\frac{1}{8}\int_0^5 f(x)\,dx+\frac{1}{8}\int_5^8 f(x)\,dx$ = CALCOLATO PRIMA $=\frac{11+1}{8}=\frac{3}{2}=1{,}5$

IL VALOR MEDIO DI $f'(x)$ IN $[1,7]$ $=\frac{1}{7-1}\int_1^7 f'(x)\,dx=\frac{1}{6}\left[f(x)\right]_1^7=$

IL VALOR MEDIO DI $f(x)$ IN $[1.7] = \frac{1}{7-1}\int_1 f(x)\,dx = \frac{1}{6}\left[f(x)\right]_1 =$

$f(1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{-\frac{3}{4}-4}{6} = -\frac{19}{24}$

IL VALOR MEDIO DI $F(x)$ IN $[9,10] = \frac{1}{1}\int_9^{10} F(x)\,dx$ con

$F(x) = x^2 - 16x + 74$ calcolato prima.

$$\int_9^{10}(x^2-16x+74)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{16}{2}x^2 + 74x\right]_9^{10} = \frac{1000}{3} - 800 + 740 -$$

$$-(+243-648+666) = 12,\overline{3}$$

4) **4.** Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

$y - F(x_P) = F'(x_P)(x - x_P)$ CON $x_P = 0$ E $x_P = 8$

$F'(x) = f(x) \rightarrow f(0) = 1$ COEFFICIENTE ANGOLARE $= 1$

POSSIAMO ESPRIMERE $F(0)$, RICORDIAMO $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \rightarrow$

$F(0) = \int_0^0 f(x)\,dx = 0$ (AREA NULLA) $\rightarrow y = x$

SE $x = 8$ $F'(8) = f(8) = 0$ E $F'(8)$ É L'AREA GIA

CALCOLATA $= 10 \rightarrow y = 10$ perché $m = F'(8) = 0$